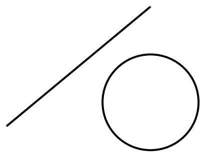
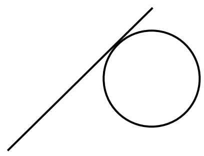
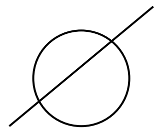
Kreise und Geraden

Passante	Tangente	Sekante
		
Kein SP	Ein SP	Zwei SP

Satz 1: Die Tangente an den Kreis k: $\left(\vec{x}-\vec{k}\right)^2 = r^2$ im Punkt B ($b_1|b_2$) hat die Gleichung $(\vec{x}-\vec{m})\cdot\left(\vec{b}-\vec{m}\right) = r^2$.

Satz 2: Die Polare an den Kreis $\left(\vec{x}-\vec{k}\right)^2 = r^2$ zum Punkt P ($p_1|p_2$) hat die Gleichung $(\vec{x}-\vec{m})\cdot(\vec{p}-\vec{m}) = r^2$.

Aufgaben

1) Schneidet die Gerade den Kreis? Bestimme, falls möglich, Schnittpunkt oder Berührpunkt.

a) $k:\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}\right]^2 = 5 \qquad g:\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\vec{x}$

b) $k:\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}\right]^2 = 5 \qquad g:\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\vec{x}$

c) $k:\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}\right]^2 = 5 \qquad g:\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\vec{x}$

Lösungen:

a) Lösung nach Schema von b) ergibt keinen Schnittpunkt

b) Einsetzen von g in k: $\left[\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}\right]^2 = 5$

$$
\begin{aligned}
(-2+t)^2+(1+2t)^2 &= 5\\
4-4t+t^2+1+4t+4t^2 &= 5\\
5t^2+5 &= 5\\
5t^2 &= 0\\
t &= 0
\end{aligned}
$$

Einsetzen von t in g ergibt B(1|3).

c) Lösung nach Schema von b) ergibt zwei Schnittpunkte S_1(2,6|4,2) und S_2 (1|1).

2) Bestimme eine Gleichung der Tangente t an den Kreis

k: $x_1^2+x_2^2+4x_1+8x_2=-11$ im Punkt (-5|-4).

Lösung: k in Koordinatenform: $(x_1+2)^2+(x_2+4)^2=9$ (durch quadr. Ergänzung)

$$\rightarrow M(-2|-4), r=3$$

$$\rightarrow t: \left[\vec{x}-\begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix}\right]\cdot\left[\begin{pmatrix}-5\\-4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix}\right]=9$$

Also: $\rightarrow t: \left[\vec{x}-\begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix}\right]\cdot\left[\begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix}\right]=9$

3) Bestimme die Gleichungen der Tangenten vom Punkt P an den Kreis um M mit dem Radius r: M(-2|2), r = 3, P(1|-1).

Lösung: $k: \left[\vec{x}-\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}\right]^2=9$

$k: (x_1+2)^2+(x_2-2)^2=9$

$$p: \left[\vec{x}-\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}\right]\cdot\left[\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}\right]=9$$

$$\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}3\\-3\end{pmatrix}=9$$

$$3x_1-3x_2+6+6=9$$

$$x_1-x_2=-1$$

$$x_1=-1+x_2$$

Einsetzen von x_1 in k:

$$(x_2+1)^2+(x_2-2)^2=9$$

$$x_2^{\ 2}+2x_2+1+x_2^{\ 2}+4x_2+4=9$$

$$2x_2^{\ 2}-2x_2-4=0$$

$$x_2^{\ 2}-x_2-2=0$$

$$x_{2_{1/2}}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+2}$$

$x_{2_1}=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=2 \Rightarrow$ Einsetzen in p: $x_1=-1+x_2 \rightarrow x_1=1 \quad \Rightarrow B(1|2)$

$x_{2_1}=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=-1 \Rightarrow$ Einsetzen in p $\rightarrow x_1=-2 \Rightarrow B(-2|-1)$